Темы для самостоятельного изучения по дисциплине:

Математика для студентов группы 51-52 «Электромонтер по ремонту и обслуживанию электрооборудования (по отраслям).

За период с 13.03. по 18.04.

**Раздел: Производная функции**

**Темы для изучения:**

1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.
2. Вторая производная, ее геометрический и физический смысл
3. Применение второй производной к исследованию функций и построению графиков.
4. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально – экономических задачах
5. Нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.

**Изучить темы, законспектировать в тетрадь, выполнить практическую работу.**

**Практическая работа №74-77 «Исследование функции с помощью производной. Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функций»**

**Цель: Научиться исследовать функции с помощью производной**

**Теоретическая справка**

Применение производной к исследованию функций, построению графиков, решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений – важнейший раздел темы «Производная и ее применение».

*Признак возрастания (убывания) функции .*

Одно из основных применений производной в школьном курсе алгебры и начал анализа − это исследование функций, в частности нахождение промежутков возрастания и убывания. Программой по математике сформулированы требования к усвоению этого материала − учащиеся должны уметь находить промежутки возрастания (убывания) функций.

Для подготовки к сознательному усвоению формулируемого в теме достаточного признака возрастания (убывания) функции (до его введения) полезно рассмотреть учащимся геометрические иллюстрации, на которых показаны графики функций, имеющих разный характер изменения, а также касательные в точках, принадлежащих к промежуткам возрастания и промежуткам убывания функций. Анализируя расположение касательных по отношению к оси абсцисс (угол наклона) и определяя тем самым знаки значений производной, учащиеся подводятся к самостоятельному формулированию требуемых признаков [1].

*Достаточный признак возрастания функции* . Если в каждой точке интервала , то функция возрастает на .

*Достаточный признак убывания функции.* Если в каждой точке интервала , то функция убывает на.

Доказательство этих признаков проводится на основании формулы Лагранжа.

Учащимся необходимо разъяснить наглядный смысл признаков, который приводится из физических рассуждений.

Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени имеет ординату . Тогда скорость этой точки в момент времени равна . Если в каждый момент времени из промежутка , то точка движется в положительном направлении оси ординат, т. е. если , то . Это означает, что функция возрастает на промежутке [2].

*Пример.* Найти промежутки возрастания и убывания функции.



Решение: найдем производную функции (заметим, что она существует для всех ):

.

Приравняем производную к нулю: , откуда .

При , следовательно, при , функция возрастает, а при , следовательно, при , функция убывает [3].

После рассмотрения темы на возрастание (убывание) функции, вводится понятие критической точки или экстремумов функции.

*Критические точки функции, ее максимумы и минимумы.*

Теоретический материал этой темы составляет основу получения общего метода решения большого класса задач − задач на нахождение экстремумов функций. На этапе, где рассматривается общая схема исследования функции, у учащихся еще не было метода нахождения точек экстремума. В данной теме рассматривается необходимый признак экстремума (Теорема Ферма) и достаточный признак максимума и минимума. После изучения темы каждый учащийся должен уметь находить экстремумы функций.

1. Для активного восприятия учащимся нового материала целесообразно повторить понятие точек экстремума и понятие экстремума.

2. Используя таблицу с рисунками (графиками функций), с помощью системы наводящих вопросов можно подвести учащихся к самостоятельному формулированию (к упрощенной формулировке) признаков максимума и минимума функции:

1) Укажите точки максимума и минимума функции.

2) Определите знак значений производной функции в промежутке слева от точки максимума (минимума).

3) Определите знак значений производной функции в промежутке справа от точки максимума (минимума).

4) Как меняется знак производной при прохождении через точку максимума (минимума)?

Доказательство признаков максимума и минимума функции необходимо проводить с привлечением учащихся [1].

Рассмотрим определение критической точки:

*Определение.* Внутренние точки области определения функции, в которых она равна нулю или не существует, называют критическими точками этой функции.

Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции. Рассмотрим соответствующее утверждение, его называют теоремой Ферма.

*Необходимое условие экстремума.* Если точка является точкой экстремума функции , то она равна нулю: .

Важно отметить, что теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, производная функции обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке не имеет.

Рассмотрим теперь критические точки, в которых производная не существует.

*Пример 1.* Рассмотрим функцию . Эта функция не имеет производной в точке 0. Значит, 0 − критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

*Пример 2.* Точка 0 для функции не является критической: в ней производная не существует, но она не внутренняя точка области определения.

Из теоремы Ферма следует, что при нахождении точек экстремумов функции требуется в первую очередь найти ее критические точки. Но как видно из рассмотренных примеров, вопрос о том, действительно ли данная критическая точка есть точка экстремума, требует дополнительного исследования. При этом часто помогают такие достаточные условия существования экстремума в точке.

*Признак максимума функции.* Если функция непрерывна в точке , а на интервале и на интервале , то точка является точкой максимума функции .

Учащимся удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке производная меняет знак с плюса на минус, то есть точка максимума.

*Признак минимума функции.* Если функция непрерывна в точке , на интервале и на интервале , то точка является точкой минимума функции .

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке производная меняет знак с минуса на плюс, то есть точка минимума [2].

*Пример.* Найти экстремумы функции .

Решение: область определения заданной функции есть множество всех действительных чисел. Найдем критические точки функции, для чего решим уравнение .

Так как , то имеем , откуда .

Исследуем знак производной функции на всех промежутках, на которые стационарные точки разбили множество . При , при , а при . Итак, - точка максимума функции, а - точка минимума функции.

С учащимися необходимо рассмотреть тему на наибольшее и наименьшее значение функции, обращая особое внимание на тот факт, что наибольшее (наименьшее) значение функции не является максимумом (минимумом) функции.

*Наибольшее и наименьшее значения функции.*

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается теорема Вейерштрасса, утверждающая, что непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение, т. е. существуют точки отрезка , в которых принимает наибольшее и наименьшее на значения.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее[2].

*Пример.* Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке .

Решение: запишем выражение для функции в более удобном виде, воспользовавшись для этого свойством четности функции косинуса 

Найдем 

****

Найдем значения аргумента, при которых , для чего решим уравнения ****и . Имеем следующую совокупность решений



Отрезку принадлежит только три решения уравнения .

Действительно, длина заданного в условии задачи отрезка меньше , то есть меньше разности каждой из трех арифметических прогрессий, записанной выше совокупности решений, поэтому рассматриваемому отрезку принадлежит не более одного числа каждого семейства.

Так как функция возрастает на своей области определения, то , то есть , откуда следует, что . То есть отрезку принадлежат и .

Находя значения и сравнив их , находим, что на отрезке функции имеет наибольшее значение , а наименьшее значение 

**Применение общей схемы к исследованию функций**

Теоретический материал, который требуется для изучения исследований функций с помощью производной уже известен учащимся. В данной теме фактически систематизируются знания учащихся, относящиеся к вопросам нахождения промежутков возрастания (убывания) и экстремумов, показывается общий метод получения результатов. Таким образом, изучение этой темы завершает рассмотрение теоретических вопросов, связанных с исследованием функций. Все положения, которые нужно отразить в решении задания на исследование, имеют теоретические обоснования, общие методы решения.

В ходе изучения этой темы учащиеся должны научиться проводить исследование функций по общей схеме и строить их графики. Построения графика функции необходимо начинать с исследования функции, которое состоит в том, что для данной функции:

1) находят ее область определения;

2) выясняют, является ли функция четной или нечетной, является ли периодической;

3) точки пересечения графика с осями координат;

4) промежутки знакопостоянства;

5) промежутки возрастания и убывания;

6) точки экстремума и значения в этих точках;

7) исследуют поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю ;

На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

*Пример 1.* Исследуем функцию и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1) , так как - многочлен.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной

3) График пересекается с осью ординат в точкечтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение , один из корней легко найти . Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Промежутки знакопостоянства не находим.

4) Найдем производную функции :



, поэтому критических точек, для которых не существует, нет.

Заметим, что , если , т.е. при значениях аргумента, равных 0,-1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| http://www.bestreferat.ru/images/paper/80/38/8633880.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/91/38/8633891.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/92/38/8633892.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/93/38/8633893.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/95/38/8633895.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/96/38/8633896.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/97/38/8633897.gif |
| http://www.bestreferat.ru/images/paper/62/38/8633862.gif | + | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | − | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | − | http://www.bestreferat.ru/images/paper/98/38/8633898.gif | + |
| http://www.bestreferat.ru/images/paper/77/38/8633877.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/99/38/8633899.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/00/39/8633900.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/01/39/8633901.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/02/39/8633902.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/01/39/8633901.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/99/38/8633899.gif |
| max | min |  |  |  |  |  |  |

В первой строке этой таблицы указаны в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими промежутки. В третьей строке записаны выводы о ходе изменения данной функции. Критическая точка равная 0 функции не является точкой экстремума [2].

Строим график функции (рис.1). Строить его удобно по промежуткам, которые указаны в таблице.

*Пример 2.* Исследовать функцию 

1) 

2) Функция четная, исследование ее можно проводить на промежутке .

3) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. решим уравнение . Пусть тогда уравнение примет вид: или , т.е. или , не имеет решения. Получили две точки пересечения с осью абсцисс . График пересекает ось ординат в точке .

4) Найдем производную функции 

5) Найдем критические точки функции:

а) , если , , или , или 

б) определена на всей 

6) Определим знак производной на промежутках, найдем значения в точках -1, 0, 1. Полученные данные занесем в таблицу и построим график [2].

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| http://www.bestreferat.ru/images/paper/80/38/8633880.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/91/38/8633891.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/92/38/8633892.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/93/38/8633893.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/95/38/8633895.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/96/38/8633896.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/97/38/8633897.gif |
| http://www.bestreferat.ru/images/paper/62/38/8633862.gif | − | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | + | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | − | http://www.bestreferat.ru/images/paper/94/38/8633894.gif | + |
| http://www.bestreferat.ru/images/paper/77/38/8633877.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/21/39/8633921.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/22/39/8633922.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/23/39/8633923.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/24/39/8633924.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/25/39/8633925.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/22/39/8633922.gif | http://www.bestreferat.ru/images/paper/23/39/8633923.gif |
| Min | max | min |  |  |  |  |  |

Построим график данной функции (рис. 2):

Приведем примеры заданий для самостоятельной работы по исследованию функций.

Исследуйте функцию и постройте ее график:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

**Выполнить самостоятельно (вариант по выбору)**

I вариант

1. Дана функция . Найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) точки экстремума;

в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке .

2. Постройте график функции .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой .

4. В какой точке касательная к графику функции параллельна прямой ?

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке .

II вариант

1. Дана функция . Найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) точки экстремума;

в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке .

2. Постройте график функции .

3. Составьте уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой .

4. В какой точке касательная к графику функции параллельна прямой ?

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке 

**ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБУЧЕНИЯ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование | Автор | Издательство, год издания |
| ОИ 1 |  Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень) | Алимов Ш. А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др | М., 2015. |
| ОИ 2 | Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровень) | Атанасян Л.С, Бутузов В.Ф., Кадомцев СБ. и др. | М., 2015. |
| ОИ 3 | Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл. | Башмаков М. И. | М., 2008. |
| ОИ 4 | Учебник для НПО и СПО | Башмаков М. И. | М., 2015. |
| ОИ 5 | Задачник: учеб.пособие | Башмаков М. И. | М., 2015. |
| ОИ 6 | Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. | Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федерова Н. Е. и др. под ред. Жижченко А. Б. | М., 2015. |
| ОИ 7 | Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. | Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федерова Н. Е. и др. под ред. Жижченко А. Б. | М., 2015. |

*Интернет-ресурсы*

<http://school-collection.edu.ru>- Электронный учебник «Математика в школе, XXI век».

<http://fcior.edu.ru>- информационные, тренировочные и контрольные материалы.

[www.school-collection.edu.ru](http://www.school-collection.edu.ru/)- Единая коллекции Цифровых образовательных ресурсов