Темы для самостоятельного изучения по дисциплине: Математика для студентов группы 57-58 «Мастер столярно- плотничных,паркетных и столярных работ»

Раздел Основы тригонометрии

Тема для изучения: Тема для изучения:

1. Преобразование простейших тригонометрических выражений.

**Изучить тему, записать в тетрадь разобранные примеры. Попробовать выполнить домашнее задание.**

[Нахождение значений тригонометрических функций](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Тригонометрические функции имеют широкое применение.

Во-первых, они помогают решать геометрические задачи – рассчитывать треугольники и более сложные фигуры. Кроме того, их можно использовать и в быту, например чтобы понять, пролезет ли кровать в дверной проем или нет (до того, как совершить покупку). Или для того, чтобы оценить высоту дома или дерева, ширину реки.

Но чаще тригонометрические функции применяют для решения технических задач: построения чертежей деталей, зданий, расчета нагрузок на составные части механизма, просчета траектории движения и прочее.

Наконец, с помощью тригонометрических функций можно описывать колебания и волны. Об этих понятиях вы уже знаете из курса физики (урок [«Механические колебания»](https://interneturok.ru/lesson/physics/9-klass/mehanicheskie-kolebaniya-i-volny/mehanicheskie-kolebaniya), урок [«Механические волны. Звук»](https://interneturok.ru/lesson/physics/9-klass/mehanicheskie-kolebaniya-i-volny/mehanicheskie-volny-zvuk)). Именно с помощью синусов и косинусов можно создать математическую модель различных колебаний: от механических до электромагнитных (урок [«Электромагнитные волны и свет»](https://interneturok.ru/lesson/physics/9-klass/elektromagnitnye-yavleniya/elektromagnitnye-volny-i-svet)).

Это основные сферы применения тригонометрических функций. Те же, кто собрался посвятить свою жизнь технической профессии, увидят и другие применения этого математического инструмента.

Вы уже знаете различные соотношения для тригонометрических функций, с помощью которых можно вычислить их значения и упростить выражение, которое содержит такие функции. На этом уроке мы займемся отработкой навыков упрощения и вычисления.

Прежде чем начать, вспомним, что для углов существуют две основные единицы измерения: градусы и радианы. Все вычисления вы должны уметь делать как в одних, так и в других единицах измерения. Основное соотношение:  радиан. Соответственно, в два раза больший угол:  радиан; а в два раза меньший –  радиан. Эти соотношения желательно держать в голове, остальные углы можно перевести из градусов в радианы с помощью пропорции:



**Задание 1.**

Известно, что:



Определить значения синуса, тангенса и котангенса , если .

*Решение*

Зная значение одной тригонометрической функции, всегда можно найти значение всех остальных с точностью до знака. Для этого понадобится основное тригонометрическое тождество:



А также определения тангенса и котангенса для произвольного угла:





Используем эти инструменты. Подставим значение косинуса в основное тригонометрическое тождество:



Упростив, получим:





Тогда:



Мы получили два возможных значения синуса: положительное и отрицательное. Зная дополнительную информацию , мы можем однозначно выбрать знак. Отмечаем на окружности точки, соответствующие углам  и . Угол  находится между ними, т. е. ему соответствуют точки верхней полуокружности (см. рис. 1).



Рис. 1. Иллюстрация к заданию 1

Ординаты всех этих точек положительны, значит, и . Еще говорят так: «угол  лежит в первой или второй четверти. В этих четвертях синус положительный»:



Осталось найти тангенс и котангенс по определению:





Ответ: ; ; .

**Задание 2.**Найти значение выражения:



*Решение*

Идея решения подобных заданий следующая: преобразовать выражение так, чтобы получить острый угол. А затем найти значение функции по таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Градусы | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347432/898d34ec494aafbf319d7a0f2282fbd8.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347433/4a361cf900f3ea56822fc5d630cdb893.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347434/e77ad72b2085bdf18469cc7673961503.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347435/3b57d4b7bcad3cd0c14077457cfeb711.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347436/a7b493cbd794c7a7c2a42a6b289d314c.png |
| Радианы | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347437/d6b2b7dea6c394f9df14348b25350743.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347438/d325acc0d26c68ac5653d7aa86dc4cc1.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347439/602d8505642a863ab213f1d68448dbc4.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347440/fc969fba7975b4f5e3f34b06734c2e1d.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347441/908d8c22db19b1d7d68c0c447f09f06b.png |
| cos | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347443/835c9a38701bc251d1f30f50d6d0c864.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347444/05aa505703b8ceca9876c42e97e9b046.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347445/160888f13533080efc10da436accf232.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347437/d6b2b7dea6c394f9df14348b25350743.png |
| sin | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347437/d6b2b7dea6c394f9df14348b25350743.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347445/160888f13533080efc10da436accf232.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347444/05aa505703b8ceca9876c42e97e9b046.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347443/835c9a38701bc251d1f30f50d6d0c864.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png |

Для преобразования понадобятся формулы приведения:

















В задании угол отрицательный , поэтому начинаем с формул для :



Теперь убираем из аргумента периоды (добавление и вычитание целого числа периодов не меняет значение функции):



По таблице находим:



Подставляем в выражение:



Ответ: .

Отметим, что период  (или ) для синусов и косинусов мы можем выделять не один раз. Поэтому для больших значений угла удобно его сразу представить в виде  (или  в радианах), где  – некоторое целое число. А для этого следует разделить с остатком значение угла на .

Например, найдем . Делим с остатком  на :



Получаем:



У тангенсов и котангенсов период равен  (или ). Соответственно, угол представляем в виде  (или  в радианах).

Например, вычислим :



Для этого угла можем уже воспользоваться таблицей:



[Упрощение выражений. Формулы приведения](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Если в задании с тригонометрическими функциями вам встретились тангенс или котангенс, то лучше сразу расписать их по определению. Это сведет вашу задачу к работе только с синусами и косинусами.

**Задание 3.**Найти значение выражения:



если .

*Решение*

По определению:



То есть:



Теперь остались только синусы и косинусы. Из полученного соотношения выразим синус:



Теперь подставим это в искомое выражение:



Осталось упростить выражение и получить ответ:



Ответ: .

**Другой способ решения**

Уменьшить количество различных видов функций в таком выражении можно и другим способом. Если все слагаемые содержат синус и косинус в одинаковой степени, то можно разделить числитель и знаменатель на синус или косинус в этой степени, в данном случае – в первой. Посмотрим, к чему это приведет.

Сразу оговоримся, почему такое деление можно делать. Так как нам дано значение тангенса угла, то косинус этого угла не может равняться 0 (иначе тангенс был бы не определен), а так как тангенс не равен 0, то и синус угла не может равняться 0 (иначе бы тангенс, как отношение синуса и косинуса, тоже был бы равен 0). Поэтому можем смело делить на любую из функций.

Разделим на  и числитель, и знаменатель:



Мы получили выражение, которое содержит только тангенс. Осталось подставить его значение из условия:



**Задание 4.**Упростить выражение:



*Решение*

Видим тангенс и котангенс – выражаем их через синус и косинус:



Получились многоэтажные дроби. Лучше избавиться от них, заменив черту дроби знаком деления:



Теперь вспоминаем принципы работы с дробями. Сначала приводим к общему знаменателю:



Можно продолжить выполнять операции с дробями. А можно отметить, что в числителях дробей мы видим формулу основного тригонометрического тождества. Можем заменить  на  – это существенно упростит наше выражение:



Выполняем деление:



Ответ: .

Кроме основного тригонометрического тождества и определений тангенса и котангенса, вы знаете еще множество формул для работы с тригонометрическими функциями. С их помощью также можно упрощать выражения. Главное – понять, какую формулу нужно использовать. Чем больше практики будет, тем легче вам будет выбрать нужную формулу. Но поначалу не страшно, если выбранный способ решения окажется длинным или не приведет к нужному результату. Тогда нужно вернуться и попробовать использовать другую формулу.

**Задание 5.**Упростить выражение:



*Решение*

Упростим каждую из функций по отдельности.

1) . Для начала выделим период . Его можно выделить  раза:



Тогда:



У нас есть формула для , а тут . Что делать? Прибавим период; значение функции при этом не изменится:



Теперь уже можно использовать формулу приведения:



2) . У нас есть формула для . В ней вычитается угол, а в нашем выражении – сложение. Поэтому, чтобы использовать эту формулу, превратим сложение в вычитание:



Формулы приведения справедливы для любых углов. Поэтому можем применить ее и для угла . Получим:



Использовав еще одну формулу приведения, получим:



3) . Перепишем это как . К углу  прибавляется , можем использовать соответствующую формулу приведения:



Используя еще одну формулу приведения, получим:



Подставим упрощенные выражения в исходное:



Ответ: .

**Другой способ решения**

Все три тригонометрические функции содержат аргумент в виде, к которому можно применить правило «головы лошади»:

1.  

 находится там же, где , плюс альфа, третья четверть, синус отрицательный (см. рис. 2). Диаметр горизонтальный, лошадь мотает головой, функцию не меняем, получаем:





Рис. 2. Иллюстрация к заданию 5

2.  

Вторая четверть, косинус отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 3), меняем функцию, получаем:





Рис. 3. Иллюстрация к заданию 5

3.   

Вторая четверть, синус положительный, диаметр горизонтальный (см. рис. 4), функцию не меняем, получаем:





Рис. 4. Иллюстрация к заданию 5

Тогда:



**Задание 6.**Вычислить:



*Решение*

В таблице мы не найдем точного значения . Конечно, можно вычислить приближенное значение с помощью калькулятора:



Аналогично можно поступить с другим тангенсом и вычислить ответ:





Но это лишь приближенное значение. Можно ли найти точное? Обратим внимание, что углы отличаются на . Это дает подсказку, что здесь можно использовать формулы приведения:



В формуле приведения из  вычитается альфа, а тут – прибавляется. Как и в предыдущем примере, сделаем из сложения вычитание:



Распишем котангенс по определению, чтобы получить для него формулу приведения:



Тогда:



И это уже будет точный, а не приближенный ответ.

Ответ: .

**Другой способ решения**

Ко второму тангенсу применим формулу приведения (используя правило «головы лошади»):  – вторая четверть, тангенс отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 5), функцию меняем:





Рис. 5. Иллюстрация к заданию 6

Подведем итоги использования формул приведения.

1. Сначала убираем периоды у функций. Для этого представляем угол в виде:
 (или ) для косинусов и синусов;
 (или ) для тангенсов и котангенсов.
2. Выбираем подходящую формулу приведения. При необходимости прибавляем/вычитаем 1 период, заменяем вычитание сложением или наоборот.
3. При наличии тангенсов/котангенсов расписываем их через синус и косинус, к которым применяем формулы приведения. Или же используем готовые формулы приведения для тангенсов и котангенсов.
4. Формулы приведения можно применять и для расчетов. То, что их нужно применить, подскажет следующее: сумма или разность углов будет равна  или .

[Формулы двойного и половинного аргумента](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Теперь перейдем к формулам двойного аргумента и следствиям из них. Напомним:





Получить формулы для тангенса и котангенса двойного угла очень просто. Этот прием мы уже неоднократно использовали сегодня  в уроке. Расписываем по определению:



По сути, мы получили формулу для тангенса двойного угла. Ее можно преобразовать и к другому виду, разделив числитель и знаменатель на :



Получилась многоэтажная дробь, разберем ее числитель и знаменатель отдельно:





В итоге тангенс двойного угла мы выразили только через тангенс одинарного.



Аналогичным образом можно поступить и с котангенсом.

**Задание 7.**Найти , если .

*Решение*

Обратим внимание, что аргументы отличаются в 2 раза. Значит, нам понадобятся формулы двойного угла или же следствия из них – формулы половинного угла.

**Способ 1**. Попробуем использовать формулы двойного угла:



По условию, это выражение равно :



Тут у нас косинус квадрат и синус квадрат. Для них мы знаем еще одно соотношение – основное тригонометрическое тождество:



Из этих двух соотношений мы можем найти значения  и . Сложив их, получим:





Тогда:



Требуется найти . Как обычно, расписываем по определению:



**Способ 2**. Можно использовать формулы половинного аргумента. Тогда  и  можно сразу выразить:







Ответ: .

Вторым способом получилось быстрее, но нужно помнить больше формул. Каждый сам может выбрать более удобный для себя способ решения: больше запоминать, но быстрее решать или же запоминать меньше, но тогда решение может оказаться длиннее.

Уметь применять формулы двойных аргументов нужно как слева направо, так и справа налево. Слева направо это сделать проще, а вот справа налево их нужно «увидеть». Вспомните: похожая ситуация была с формулами сокращенного умножения. Найти выражение вида  просто: увидел – применил формулу. А вот в обратную сторону выражение вида  нужно еще заметить.

Итак, посмотрим на правые части формул двойных аргументов и подумаем, на что же нам обращать внимание.





Для синусов справа стоит произведение синуса и косинуса с одинаковыми аргументами. Именно на это мы будет обращать внимание. Умножить и разделить выражение на  – это не проблема. Для косинусов справа стоит разность квадратов. Не путайте с основным тригонометрическим тождеством – там сумма квадратов.

**Задание 8.**Найти значение выражения:



*Решение*

Видим произведение косинуса и синуса одного аргумента. Это показатель того, что нужно применить формулу синуса двойного угла. Не хватает двойки перед выражением. Поэтому умножим и разделим выражение на :



Теперь можем применить формулу:



Далее нужно применить формулы приведения. Можете самостоятельно потренироваться это делать. В итоге вы должны получить ответ . Если ответ не совпал, смотрите решение ниже.

Ответ: .

**Использование формул приведения**

Выделим в дроби целую часть:  

Тогда:  

У нас по-прежнему в аргументе не острый угол. Попробуем еще раз выделить :





Осталось применить формулу приведения для отрицательных углов и найти значение по таблице:



Тогда:  

[Тригонометрические функции суммы и разности](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Перейдем к применению формул косинусов и синусов суммы и разности. Они не так часто применяются при упрощениях и вычислениях, как следствия из них – формулы двойных углов. Но несколько полезных применений все же есть.

Во-первых, с помощью них можно получить аналогичные формулы для тангенсов:





Выводятся они точно так же, как и формулы для тангенса двойного угла. Можете самостоятельно попробовать их получить. Проверить себя можно ниже.

**Вывод формул тангенса суммы и разности**

По определению:



Применяем формулы косинусов и синусов суммы:



Разделим числитель и знаменатель на . В числителе получим:



В знаменателе:



В итоге:



Чтобы получить формулу разности, запишем:



С учетом формул приведения:



Как и другие формулы, формулы косинусов и синусов суммы и разности могут помочь при упрощении выражений.

**Задание 9.**Упростить выражение:



*Решение.*

Применяем формулы косинуса суммы и разности:



Ответ: .

У формулы синуса суммы есть еще один, совсем не очевидный способ применения.

**Задание 10.**Упростить выражение:



*Решение.*

Казалось бы: куда же еще упрощать, тут всего 4 операции для вычисления? Но это можно сделать. Вынесем за скобку число. Да, в выражении его нет. Но это не мешает нам каждое слагаемое умножить и поделить на :



Пока не проще. Но подождите:  – это значения косинусов и синусов из таблицы. Например:





Тогда наше выражение равно:



В скобках мы видим синус суммы. Получаем ответ:



Ответ: .

Это выражение действительно проще – в нем всего 3 операции: сложение, вычисление синуса, умножение.

Данный прием может пригодиться не только при упрощении выражений, но и при решении уравнений, оценке значений, построении графиков. В общем виде его можно представить так.

Пусть имеется выражение вида:



Выносим за скобки выражение :



При этом всегда можно найти такой угол , что:





Тогда получим:



О том, почему всегда найдется такой угол , смотрите ниже.

**Условия, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла**

Найдем условия того, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла.

Для произвольного угла мы давали определение его синуса и косинуса – это координаты соответствующей точки на единичной окружности (см. рис. 1).



Рис. 1. Синус и косинус произвольного угла – это координаты соответствующей точки на единичной окружности

Верно и обратное: если мы возьмем точку на единичной окружности, то ее координаты – это будут синус и косинус соответствующего угла. Точнее, многих углов – с точностью до периода. Значит, если пара чисел – это координаты точки на единичной окружности, то эти числа будут косинусом и синусом некоторого угла .

А какое условие, что точка лежит на единичной окружности? Сумма квадратов ее координат должна равняться  (уравнение окружности: ). Вот и получили условие. Проверим его для выражений  и :



Возводим в квадрат:



Равенство верное. Значит, всегда найдется такой угол , что:





Естественно, это не случайность – мы специально так выбрали выражения, чтобы сумма их квадратов была равна 1.

[Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

В конце нашего занятия мы поговорим о формулах преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот. Как и все предыдущие, они также применяются для упрощения выражений. Конечно, у вас может возникнуть вопрос: «Во что преобразовывать, чтобы упростить выражение: в сумму или в произведение?». Если у вас такой вопрос возник, вспомните, как поступать в таких же ситуациях с рациональными выражениями: когда раскладывать на множители, а когда – раскрывать скобки.

**Задание 11.**Упростить выражение:



*Решение.*

Упростить дробь – значит ее сократить. Для сокращения дроби нужно разложить числитель и знаменатель на множители. То есть нужно преобразовать сумму в произведение. Тут у нас по 3 слагаемых, какие же складывать? Возможны различные варианты, но начинать всегда лучше с симметричных. То есть со сложения  и  и аналогичных синусов:





Подставим в исходное выражение:



Теперь тут есть общие множители, которые можно вынести за скобки:



Ответ: .

**Задание 12.**Доказать тождество:



*Решение.*

Для доказательства упростим левую часть равенства и покажем, что она всегда равна правой. Здесь по порядку действия стоит сначала умножение, затем – сложение. Поэтому сначала можем преобразовать только произведение в сумму:



Подставив в левую часть равенства, получим:



Видим, что после упрощения левая часть равенства тождественно равна правой.

*Доказано.*

**Домашнее задание**

1. Доказать тождество: 
2. Упростить выражение: 
3. Преобразовать в произведение: 

**Список литературы**

1. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Базовый и углубленный уровни. Учебник. ФГОС», АО «Издательство «Просвещение» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. 10–11.
2. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа». 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень). В 2 ч., ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА» Ч.1.: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Ч.2.: Мордкович А.Г. и др., под ред. Мордковича А.Г. 10–11.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, АО «Издательство «Просвещение» Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. 10.

**Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет**

1. Ин­тер­нет-пор­тал [yaklass.​ru](https://www.yaklass.ru/p/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskikh-vyrazhenii-9146/formuly-dvoinogo-argumenta-9137/re-672b30cf-ca36-46c1-970a-d8454337d474)
2. Ин­тер­нет-пор­тал [cleverstudents.ru](http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/sum_of_sin_and_cos.html)
3. Ин­тер­нет-пор­тал [math24.ru](http://www.math24.ru/%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%81%D1%83%D0%BC%D0%BC%D1%8B-%D0%B8-%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8-%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9-%D0%B2-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5.html)
4. https://interneturok.ru/