Темы для самостоятельного изучения по дисциплине: Математика для студентов группы 57-58 «Мастер столярно- плотничных,паркетных и столярных работ»

Раздел Основы тригонометрии

Тема для изучения: Тема для изучения:

1. Преобразование простейших тригонометрических выражений.

**Изучить тему, записать в тетрадь разобранные примеры. Попробовать выполнить домашнее задание.**

[Нахождение значений тригонометрических функций](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Тригонометрические функции имеют широкое применение.

Во-первых, они помогают решать геометрические задачи – рассчитывать треугольники и более сложные фигуры. Кроме того, их можно использовать и в быту, например чтобы понять, пролезет ли кровать в дверной проем или нет (до того, как совершить покупку). Или для того, чтобы оценить высоту дома или дерева, ширину реки.

Но чаще тригонометрические функции применяют для решения технических задач: построения чертежей деталей, зданий, расчета нагрузок на составные части механизма, просчета траектории движения и прочее.

Наконец, с помощью тригонометрических функций можно описывать колебания и волны. Об этих понятиях вы уже знаете из курса физики (урок [«Механические колебания»](https://interneturok.ru/lesson/physics/9-klass/mehanicheskie-kolebaniya-i-volny/mehanicheskie-kolebaniya), урок [«Механические волны. Звук»](https://interneturok.ru/lesson/physics/9-klass/mehanicheskie-kolebaniya-i-volny/mehanicheskie-volny-zvuk)). Именно с помощью синусов и косинусов можно создать математическую модель различных колебаний: от механических до электромагнитных (урок [«Электромагнитные волны и свет»](https://interneturok.ru/lesson/physics/9-klass/elektromagnitnye-yavleniya/elektromagnitnye-volny-i-svet)).

Это основные сферы применения тригонометрических функций. Те же, кто собрался посвятить свою жизнь технической профессии, увидят и другие применения этого математического инструмента.

Вы уже знаете различные соотношения для тригонометрических функций, с помощью которых можно вычислить их значения и упростить выражение, которое содержит такие функции. На этом уроке мы займемся отработкой навыков упрощения и вычисления.

Прежде чем начать, вспомним, что для углов существуют две основные единицы измерения: градусы и радианы. Все вычисления вы должны уметь делать как в одних, так и в других единицах измерения. Основное соотношение: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347407/e01e02fb377fde6b84a1bc8d77dc7d1a.png радиан. Соответственно, в два раза больший угол: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347408/6453b6ec0afe887c59f597e5311f1e40.png радиан; а в два раза меньший – https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347409/8b75c3654014b5d8d36bcce8424ba066.png радиан. Эти соотношения желательно держать в голове, остальные углы можно перевести из градусов в радианы с помощью пропорции:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347410/d73677634c838eb008896f23e5265cb5.png

**Задание 1.**

Известно, что:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347411/23474bfca81a1d79fd6a3b1cbf7d7f3e.png

Определить значения синуса, тангенса и котангенса https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347412/eaeebda958f025eafe8d0f80ff263481.png, если https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347413/030e86f800a97c49d5af983f0d758180.png.

*Решение*

Зная значение одной тригонометрической функции, всегда можно найти значение всех остальных с точностью до знака. Для этого понадобится основное тригонометрическое тождество:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347414/623b2893e25c139cdc268ffb6ae863f3.png

А также определения тангенса и котангенса для произвольного угла:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347415/b1d763249b2b673b5d84bd791c7210f4.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347416/f356cc27675cbf7981be524e789134b9.png

Используем эти инструменты. Подставим значение косинуса в основное тригонометрическое тождество:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347417/7181cf745485bcbe145b899efa274fd1.png

Упростив, получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347418/9a91c03eb476284ac3379c3e21aec982.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347419/12cdaabab809bc316766100434c88208.png

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347420/cee2fc03ea5dfef5991820e6b3a6310e.png

Мы получили два возможных значения синуса: положительное и отрицательное. Зная дополнительную информацию https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347413/030e86f800a97c49d5af983f0d758180.png, мы можем однозначно выбрать знак. Отмечаем на окружности точки, соответствующие углам https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347421/c4cf0c8fc52d70123ae4e76a682f8ed1.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347422/6bf65e910f85b481580a566b8c23ff0b.png. Угол https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347412/eaeebda958f025eafe8d0f80ff263481.png находится между ними, т. е. ему соответствуют точки верхней полуокружности (см. рис. 1).

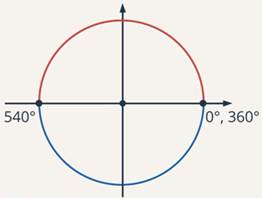


Рис. 1. Иллюстрация к заданию 1

Ординаты всех этих точек положительны, значит, и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347424/d64204ad52364db91fc03b9fda27e654.png. Еще говорят так: «угол https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347412/eaeebda958f025eafe8d0f80ff263481.png лежит в первой или второй четверти. В этих четвертях синус положительный»:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347425/532e166d61f27ccebbdfd764c9e2a77c.png

Осталось найти тангенс и котангенс по определению:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347426/9c35e20f9dde07384f0e73feb03d2484.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347427/c90b2ff97e1de22d88331b4cd7b1ca22.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347428/c09b4360e30b9ccf958e4c3d4d927b7e.png; https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347429/4e3ee0c6cc1f38856fe6972ede1e0389.png; https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347430/01b302a3fef424b6e98fba3f50533c49.png.

**Задание 2.**Найти значение выражения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347431/18d6c756c6e8a91c1320cbb9deb63bbc.png

*Решение*

Идея решения подобных заданий следующая: преобразовать выражение так, чтобы получить острый угол. А затем найти значение функции по таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Градусы | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347432/898d34ec494aafbf319d7a0f2282fbd8.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347433/4a361cf900f3ea56822fc5d630cdb893.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347434/e77ad72b2085bdf18469cc7673961503.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347435/3b57d4b7bcad3cd0c14077457cfeb711.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347436/a7b493cbd794c7a7c2a42a6b289d314c.png |
| Радианы | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347437/d6b2b7dea6c394f9df14348b25350743.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347438/d325acc0d26c68ac5653d7aa86dc4cc1.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347439/602d8505642a863ab213f1d68448dbc4.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347440/fc969fba7975b4f5e3f34b06734c2e1d.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347441/908d8c22db19b1d7d68c0c447f09f06b.png |
| cos | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347443/835c9a38701bc251d1f30f50d6d0c864.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347444/05aa505703b8ceca9876c42e97e9b046.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347445/160888f13533080efc10da436accf232.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347437/d6b2b7dea6c394f9df14348b25350743.png |
| sin | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347437/d6b2b7dea6c394f9df14348b25350743.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347445/160888f13533080efc10da436accf232.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347444/05aa505703b8ceca9876c42e97e9b046.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347443/835c9a38701bc251d1f30f50d6d0c864.png | https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png |

Для преобразования понадобятся формулы приведения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347446/b7c14c5e0c4ba164a05060d175b4ccba.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347447/fb941b0f52847505e4d9f3c85a463f2c.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347448/3506fa15cd72cf27e82b4f875caa8779.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347449/bfbeb0c47745e3c6a77c7bad01de3e46.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347450/933361295b24c627ce503c38b5291b20.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347451/2f5ef290beb89d5f8f098104484714e9.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347452/3e5a029cfec7d7ec3d333caab90c8da2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347453/665e3b66e5d17579dad8fba3d73eba72.png

В задании угол отрицательный https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347454/0bbd58b45e557662120606bdfff2f5a2.png, поэтому начинаем с формул для https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347455/15222ce1ab3ac42f41c59ff1966c2e28.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347456/3c87e5e31a8e914801ff1890458375d4.png

Теперь убираем из аргумента периоды (добавление и вычитание целого числа периодов не меняет значение функции):

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347457/59ded45ab474e9e8f1319d0f0d5825cb.png

По таблице находим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347458/fb0a065a41f172514f980d54865510bb.png

Подставляем в выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347459/66c036a55727bc3b6a9cdc4b6cf62528.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347460/6ef5eb0f039117116d599b5f9cc2b08e.png.

Отметим, что период https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347421/c4cf0c8fc52d70123ae4e76a682f8ed1.png (или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347461/3a0d863c641091ba8554f6bdc5f3289e.png) для синусов и косинусов мы можем выделять не один раз. Поэтому для больших значений угла удобно его сразу представить в виде https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347462/4c80279998cf9e5dd1caeb4a6bf1dd7b.png (или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347463/cb7ffb0d962d15b762069cda4f52fc06.png в радианах), где https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347464/679d115449403cc5d71cde478d8bb5fb.png – некоторое целое число. А для этого следует разделить с остатком значение угла на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347421/c4cf0c8fc52d70123ae4e76a682f8ed1.png.

Например, найдем https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347465/94dc326afab054d0593e92650b7e9a3b.png. Делим с остатком https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347466/d0a573433d3c32935e942d5d64f60bca.png на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347467/b27ad1db39004a14429b9a5e9d002cbd.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347468/16c1dbee63a4f22ed2f90c3ea45acfec.png

Получаем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347469/c06707f599f26b162e78ce79813d4496.png

У тангенсов и котангенсов период равен https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347470/fb479d7a2318094a8661325d2a21fb71.png (или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347471/4722d2febc11706e78f17c3664c0d016.png). Соответственно, угол представляем в виде https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347472/42593ba85f3aa0293f32dbae8a66203f.png (или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347473/31b4344c4b60c789fb47e00d729631e0.png в радианах).

Например, вычислим https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347474/b3fdf061ca8528fa4441128a904f8064.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347475/bb98f64ee93aa7e87940ae9246c0d3a5.png

Для этого угла можем уже воспользоваться таблицей:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347476/cf7d9c1042f3a86c82dc20fd64982b1c.png

[Упрощение выражений. Формулы приведения](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Если в задании с тригонометрическими функциями вам встретились тангенс или котангенс, то лучше сразу расписать их по определению. Это сведет вашу задачу к работе только с синусами и косинусами.

**Задание 3.**Найти значение выражения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347477/2151c67d6253ff2e8487a32693c2df22.png

если https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347478/205907f0ba7110e4a6be410afeb6e107.png.

*Решение*

По определению:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347415/b1d763249b2b673b5d84bd791c7210f4.png

То есть:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347479/cf1b22557a417d46e24085b99eab6945.png

Теперь остались только синусы и косинусы. Из полученного соотношения выразим синус:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347480/c9d126bc5136533d93a1a48f39c06912.png

Теперь подставим это в искомое выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347481/d69ca87fbc47e0d46ab25f5c9d0af30e.png

Осталось упростить выражение и получить ответ:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347482/61bb769966969488e39207bb4563da4b.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347483/8cf8aa1764b4b9562f126ef6f1606811.png.

**Другой способ решения**

Уменьшить количество различных видов функций в таком выражении можно и другим способом. Если все слагаемые содержат синус и косинус в одинаковой степени, то можно разделить числитель и знаменатель на синус или косинус в этой степени, в данном случае – в первой. Посмотрим, к чему это приведет.

Сразу оговоримся, почему такое деление можно делать. Так как нам дано значение тангенса угла, то косинус этого угла не может равняться 0 (иначе тангенс был бы не определен), а так как тангенс не равен 0, то и синус угла не может равняться 0 (иначе бы тангенс, как отношение синуса и косинуса, тоже был бы равен 0). Поэтому можем смело делить на любую из функций.

Разделим на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347484/31bae142515e4b37dbb6b63757768a19.png и числитель, и знаменатель:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347485/ca9c618221c723ed96953725c93e34b2.png

Мы получили выражение, которое содержит только тангенс. Осталось подставить его значение из условия:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347486/df717f8c79fa46a35f1bbf7575da0024.png

**Задание 4.**Упростить выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347487/c5f1489a1a2f65edf609adce6cea8cf9.png

*Решение*

Видим тангенс и котангенс – выражаем их через синус и косинус:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347488/83ae908755664b776da3ed1996cd290f.png

Получились многоэтажные дроби. Лучше избавиться от них, заменив черту дроби знаком деления:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347489/08c389f4aae8e7719070f1ba72287129.png

Теперь вспоминаем принципы работы с дробями. Сначала приводим к общему знаменателю:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347490/0a5db660e670cf7ef7193513019b6698.png

Можно продолжить выполнять операции с дробями. А можно отметить, что в числителях дробей мы видим формулу основного тригонометрического тождества. Можем заменить https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347491/b3bb78639bb2c4ae0d324367b858ced7.png на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png – это существенно упростит наше выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347492/6d1390ce3a0251e100c40bd7da4f2250.png

Выполняем деление:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347493/670e8fbad6aca495eec6ac1d2afc9bc5.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png.

Кроме основного тригонометрического тождества и определений тангенса и котангенса, вы знаете еще множество формул для работы с тригонометрическими функциями. С их помощью также можно упрощать выражения. Главное – понять, какую формулу нужно использовать. Чем больше практики будет, тем легче вам будет выбрать нужную формулу. Но поначалу не страшно, если выбранный способ решения окажется длинным или не приведет к нужному результату. Тогда нужно вернуться и попробовать использовать другую формулу.

**Задание 5.**Упростить выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347494/049b87455d200b5105b4ba275e4446e8.png

*Решение*

Упростим каждую из функций по отдельности.

1) https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347495/c8bac45dfa46849947cbe5bc0531e06e.png. Для начала выделим период https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347461/3a0d863c641091ba8554f6bdc5f3289e.png. Его можно выделить https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347496/fd9fe6779d2b27da0c5ed6e826243c89.png раза:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347497/e0b5bf379065c96b4eed15a3e8564ab9.png

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347498/79dc8d5ecffab692ad79abc87fc77294.png

У нас есть формула для https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347499/abf88a21511566c8330c751317ed81b9.png, а тут https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347500/dcaec78fd355e82dcccfc999b4ece04f.png. Что делать? Прибавим период; значение функции при этом не изменится:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347501/f92e8bdf4cc5be54d3187617bdd3b914.png

Теперь уже можно использовать формулу приведения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347502/b369f66a394968d29e39fa1cf0fe695c.png

2) https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347503/bea3dea46a1c3e78c523f86f8ab8431f.png. У нас есть формула для https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347504/52d60bccea89c65456f52488bb18ffaa.png. В ней вычитается угол, а в нашем выражении – сложение. Поэтому, чтобы использовать эту формулу, превратим сложение в вычитание:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347505/6f2c37a640e5223422614a751af0bbf0.png

Формулы приведения справедливы для любых углов. Поэтому можем применить ее и для угла https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347455/15222ce1ab3ac42f41c59ff1966c2e28.png. Получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347506/7c504f361a2784a99cca0be5a7bc0f23.png

Использовав еще одну формулу приведения, получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347507/2e11ae6f6578cdfd08146d486438e099.png

3) https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347508/d34d7b6f8ec865e8fd05831d8c49fa99.png. Перепишем это как https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347509/e61cb51e59692ac1d51ec37ae2d8b252.png. К углу https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347455/15222ce1ab3ac42f41c59ff1966c2e28.png прибавляется https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347471/4722d2febc11706e78f17c3664c0d016.png, можем использовать соответствующую формулу приведения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347510/9bf1a9096bffd5a678e8651ace1dc30c.png

Используя еще одну формулу приведения, получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347511/30258d63d53322c4cea45663153ed598.png

Подставим упрощенные выражения в исходное:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347512/96730a32f3b2c76a979e63db7170a940.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347513/c6a026c6667ce343a482169166085f52.png.

**Другой способ решения**

Все три тригонометрические функции содержат аргумент в виде, к которому можно применить правило «головы лошади»:

1.  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347514/3c4ae4c28a603b109860d667d929e8bb.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347515/64129babd1ccabbb4d4781ac46de0557.png находится там же, где https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347471/4722d2febc11706e78f17c3664c0d016.png, плюс альфа, третья четверть, синус отрицательный (см. рис. 2). Диаметр горизонтальный, лошадь мотает головой, функцию не меняем, получаем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347516/ed1fa16d70ae92b2c5bee354f83cf89c.png

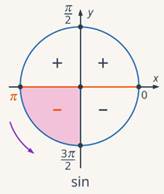


Рис. 2. Иллюстрация к заданию 5

2.  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347518/eb46406dc3720c03388f3808dc329e6b.png

Вторая четверть, косинус отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 3), меняем функцию, получаем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347519/bc1c2b0b8ccc1366e0b9319f167d99a0.png

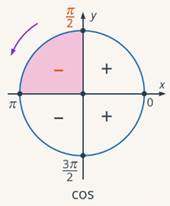


Рис. 3. Иллюстрация к заданию 5

3.   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347521/9bcb0c15c158ffccf644d73ac89686cc.png

Вторая четверть, синус положительный, диаметр горизонтальный (см. рис. 4), функцию не меняем, получаем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347522/618abc81034537564cccb5a1c7875a88.png

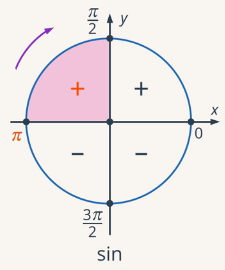


Рис. 4. Иллюстрация к заданию 5

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347524/61b2ff6cd7bd795d11f25b64dc3a9157.png

**Задание 6.**Вычислить:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347525/fd0403a134a5ed282c7e132e482e783c.png

*Решение*

В таблице мы не найдем точного значения https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347526/c511e702f6e7ad7653d810fad3b7b066.png. Конечно, можно вычислить приближенное значение с помощью калькулятора:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347527/eb467124fb4d3ac1b4d730b1b0075275.png

Аналогично можно поступить с другим тангенсом и вычислить ответ:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347528/96fc7ef998c19983bec525e9b2dc2099.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347529/88328e7c36663422512f40d83cfad586.png

Но это лишь приближенное значение. Можно ли найти точное? Обратим внимание, что углы отличаются на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347436/a7b493cbd794c7a7c2a42a6b289d314c.png. Это дает подсказку, что здесь можно использовать формулы приведения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347530/57f4d29535182e9c9910a3ac368c68d5.png

В формуле приведения из https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347436/a7b493cbd794c7a7c2a42a6b289d314c.png вычитается альфа, а тут – прибавляется. Как и в предыдущем примере, сделаем из сложения вычитание:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347531/11459ebcc095c3734f7e71b6adde684d.png

Распишем котангенс по определению, чтобы получить для него формулу приведения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347532/cf59f76fd163f11bbc214ca008bf996c.png

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347533/d0c8f662cb2d6077f2fe58b2f18098f5.png

И это уже будет точный, а не приближенный ответ.

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347534/78c102ca0a86b2fc91747a66fe436fc4.png.

**Другой способ решения**

Ко второму тангенсу применим формулу приведения (используя правило «головы лошади»): https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347535/03f6ca06dee2105b67561694f303568e.png – вторая четверть, тангенс отрицательный, диаметр вертикальный (см. рис. 5), функцию меняем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347536/31fb1fb4781ce002bfee67b7a223157e.png

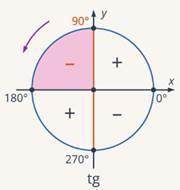


Рис. 5. Иллюстрация к заданию 6

Подведем итоги использования формул приведения.

1. Сначала убираем периоды у функций. Для этого представляем угол в виде:  
   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347462/4c80279998cf9e5dd1caeb4a6bf1dd7b.png (или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347463/cb7ffb0d962d15b762069cda4f52fc06.png) для косинусов и синусов;  
   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347472/42593ba85f3aa0293f32dbae8a66203f.png (или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347473/31b4344c4b60c789fb47e00d729631e0.png) для тангенсов и котангенсов.
2. Выбираем подходящую формулу приведения. При необходимости прибавляем/вычитаем 1 период, заменяем вычитание сложением или наоборот.
3. При наличии тангенсов/котангенсов расписываем их через синус и косинус, к которым применяем формулы приведения. Или же используем готовые формулы приведения для тангенсов и котангенсов.
4. Формулы приведения можно применять и для расчетов. То, что их нужно применить, подскажет следующее: сумма или разность углов будет равна https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347436/a7b493cbd794c7a7c2a42a6b289d314c.png или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347470/fb479d7a2318094a8661325d2a21fb71.png.

[Формулы двойного и половинного аргумента](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Теперь перейдем к формулам двойного аргумента и следствиям из них. Напомним:

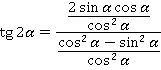
https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347538/dd3734ceb68d8c9acea6b0cba9170ba5.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347539/fcd06386c9d599f4e7beffdaa11a77eb.png

Получить формулы для тангенса и котангенса двойного угла очень просто. Этот прием мы уже неоднократно использовали сегодня  в уроке. Расписываем по определению:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347540/bac6740e318a6731dfda76d8562766b2.png

По сути, мы получили формулу для тангенса двойного угла. Ее можно преобразовать и к другому виду, разделив числитель и знаменатель на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347541/535645f591155fcf768a156fbc5fe1df.png:



Получилась многоэтажная дробь, разберем ее числитель и знаменатель отдельно:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347543/113232773321e5b5e911224f12110315.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347544/1c8631e7ae179aec527ac6a796bdea88.png

В итоге тангенс двойного угла мы выразили только через тангенс одинарного.

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347545/54fb431878820f99bc1437ba8201d8e3.png

Аналогичным образом можно поступить и с котангенсом.

**Задание 7.**Найти https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347546/0ad3fa3b38a08d9a44edde0822ea1e02.png, если https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347547/014d52b28e7e5dab0f33465ccb9f1f05.png.

*Решение*

Обратим внимание, что аргументы отличаются в 2 раза. Значит, нам понадобятся формулы двойного угла или же следствия из них – формулы половинного угла.

**Способ 1**. Попробуем использовать формулы двойного угла:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347549/bc54c6e218126ad9552fcf3e4f1cf073.png

По условию, это выражение равно https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347550/b21793cb442141c63d1e6d7d692230e8.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347551/233b155e0258ea0f1f015f1aa7ed6664.png

Тут у нас косинус квадрат и синус квадрат. Для них мы знаем еще одно соотношение – основное тригонометрическое тождество:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347552/86c603db1b06e0fecff92c8d02507f55.png

Из этих двух соотношений мы можем найти значения https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347553/6cd246b050df218e58250b77ad5c9d0c.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347554/13ecf01a465ebacfc8e5f48647934baa.png. Сложив их, получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347555/8644eaf917ca4ce6f71279cdf79132ec.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347556/1846dafcdd2d1b07ee10330b0ab505b9.png

Тогда:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347557/010bbc903e06847ea2073f8003b08e2b.png

Требуется найти https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347546/0ad3fa3b38a08d9a44edde0822ea1e02.png. Как обычно, расписываем по определению:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347558/98e29a820fd64d3a67e510edf86a0fd4.png

**Способ 2**. Можно использовать формулы половинного аргумента. Тогда https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347554/13ecf01a465ebacfc8e5f48647934baa.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347553/6cd246b050df218e58250b77ad5c9d0c.png можно сразу выразить:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347559/12ffad9451b566c61fdfae3e8bc50079.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347560/2b4c91d637db2db18d9237894cd425bd.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347558/98e29a820fd64d3a67e510edf86a0fd4.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347561/0a6fc68b2d029a3ec64ccf1c7e83a1a7.png.

Вторым способом получилось быстрее, но нужно помнить больше формул. Каждый сам может выбрать более удобный для себя способ решения: больше запоминать, но быстрее решать или же запоминать меньше, но тогда решение может оказаться длиннее.

Уметь применять формулы двойных аргументов нужно как слева направо, так и справа налево. Слева направо это сделать проще, а вот справа налево их нужно «увидеть». Вспомните: похожая ситуация была с формулами сокращенного умножения. Найти выражение вида https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347562/4c0ad13af1e905318e25510ceff4c2a2.png просто: увидел – применил формулу. А вот в обратную сторону выражение вида https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347563/0bc5de75212f4b66036273cde2318428.png нужно еще заметить.

Итак, посмотрим на правые части формул двойных аргументов и подумаем, на что же нам обращать внимание.

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347538/dd3734ceb68d8c9acea6b0cba9170ba5.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347539/fcd06386c9d599f4e7beffdaa11a77eb.png

Для синусов справа стоит произведение синуса и косинуса с одинаковыми аргументами. Именно на это мы будет обращать внимание. Умножить и разделить выражение на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347548/b9b3edaaaffc5181b54b7a11d4acd3d3.png – это не проблема. Для косинусов справа стоит разность квадратов. Не путайте с основным тригонометрическим тождеством – там сумма квадратов.

**Задание 8.**Найти значение выражения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347564/90c287b843f94a4fe97bfa09df5dc4a7.png

*Решение*

Видим произведение косинуса и синуса одного аргумента. Это показатель того, что нужно применить формулу синуса двойного угла. Не хватает двойки перед выражением. Поэтому умножим и разделим выражение на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347548/b9b3edaaaffc5181b54b7a11d4acd3d3.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347565/9f3a22edd5a7967ea7cd9fb9402470d7.png

Теперь можем применить формулу:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347566/b5e5ccadbd2af085267a52078aa2e1ca.png

Далее нужно применить формулы приведения. Можете самостоятельно потренироваться это делать. В итоге вы должны получить ответ https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347567/103c29d1b8380c2fada4792dcbea6221.png. Если ответ не совпал, смотрите решение ниже.

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347567/103c29d1b8380c2fada4792dcbea6221.png.

**Использование формул приведения**

Выделим в дроби целую часть:  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347568/3038c9d2cca14fa2e0abf93195aa7192.png

Тогда:  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347569/daa70a9c409390347678d3cc36cd3eb6.png

У нас по-прежнему в аргументе не острый угол. Попробуем еще раз выделить https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347471/4722d2febc11706e78f17c3664c0d016.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347570/3006a9b3e37b1edea9bc9b21bdd505ef.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347571/58d95025826e2facc9677a4945a2dd78.png

Осталось применить формулу приведения для отрицательных углов и найти значение по таблице:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347572/255e94488fe0f824f5db9bb01c976328.png

Тогда:  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347573/70804693b5d5ec7d33e2eb883482405c.png

[Тригонометрические функции суммы и разности](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

Перейдем к применению формул косинусов и синусов суммы и разности. Они не так часто применяются при упрощениях и вычислениях, как следствия из них – формулы двойных углов. Но несколько полезных применений все же есть.

Во-первых, с помощью них можно получить аналогичные формулы для тангенсов:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347574/b3f2452145e5ba5a83d901391cb857c9.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347575/3a25f9c99b0cc2d8e5634e5e88ff704e.png

Выводятся они точно так же, как и формулы для тангенса двойного угла. Можете самостоятельно попробовать их получить. Проверить себя можно ниже.

**Вывод формул тангенса суммы и разности**

По определению:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347576/b71280e1b6937a3ad55b3a344a9269fe.png

Применяем формулы косинусов и синусов суммы:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347577/5e48a18254ce9af5332bf51dfe84d5c7.png

Разделим числитель и знаменатель на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347578/377c6ad3f9598def673e49fc796b36da.png. В числителе получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347579/a0042fd8b4c2a79a014b2faf28faa36d.png

В знаменателе:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347580/b3a283a4c84e9acb1afb3253dfb84724.png

В итоге:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347574/b3f2452145e5ba5a83d901391cb857c9.png

Чтобы получить формулу разности, запишем:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347581/68a3e6831736b35f097a9db813b92aed.png

С учетом формул приведения:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347575/3a25f9c99b0cc2d8e5634e5e88ff704e.png

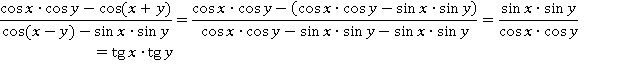
Как и другие формулы, формулы косинусов и синусов суммы и разности могут помочь при упрощении выражений.

**Задание 9.**Упростить выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347582/4373599f86d36fe733a3a99197333c2e.png

*Решение.*

Применяем формулы косинуса суммы и разности:



Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347584/27a331ad2676a370737336694ad1a451.png.

У формулы синуса суммы есть еще один, совсем не очевидный способ применения.

**Задание 10.**Упростить выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347585/b82c99c3f665302d548dd7d9dd42f263.png

*Решение.*

Казалось бы: куда же еще упрощать, тут всего 4 операции для вычисления? Но это можно сделать. Вынесем за скобку числоhttps://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347587/ad4003b32a2fe6d04f26d37d8fc54c62.png. Да, в выражении его нет. Но это не мешает нам каждое слагаемое умножить и поделить на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347548/b9b3edaaaffc5181b54b7a11d4acd3d3.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347588/a1fa5aa2cf3e7e54d7a9acabb650c8a6.png

Пока не проще. Но подождите: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347589/c8b3adb013e88973fee1463866a0a926.png – это значения косинусов и синусов из таблицы. Например:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347590/3ea5802fec607ff2e6eeab756aca3b9c.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347591/92823705c06c3180beba61b151ddcfc5.png

Тогда наше выражение равно:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347592/492e2a110a429414238cdf13950e8714.png

В скобках мы видим синус суммы. Получаем ответ:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347593/7e7947e43dd4b8e72887c9936020d94c.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347594/7b84f0df85be37fe5392dba70e01023b.png.

Это выражение действительно проще – в нем всего 3 операции: сложение, вычисление синуса, умножение.

Данный прием может пригодиться не только при упрощении выражений, но и при решении уравнений, оценке значений, построении графиков. В общем виде его можно представить так.

Пусть имеется выражение вида:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347596/0f34735750223da6c7421ae4dddf29b7.png

Выносим за скобки выражение https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347597/74b118e6c4da92f37725d2e40c8d14b0.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347598/6700441b373206d5b6a02a8ed4113df9.png

При этом всегда можно найти такой угол https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347599/9addbd7fdd10e0b8ba091c96f6e06fe0.png, что:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347600/ea9a18c267a7d3422094d84c383bbea2.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347601/d4c50fa611ad78cf96dd59c104f9a7df.png

Тогда получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347602/80ec1769719e8c66b531de857aa99d32.png

О том, почему всегда найдется такой угол https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347599/9addbd7fdd10e0b8ba091c96f6e06fe0.png, смотрите ниже.

**Условия, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла**

Найдем условия того, что два числа являются косинусом и синусом некоторого угла.

Для произвольного угла мы давали определение его синуса и косинуса – это координаты соответствующей точки на единичной окружности (см. рис. 1).

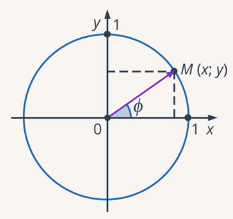


Рис. 1. Синус и косинус произвольного угла – это координаты соответствующей точки на единичной окружности

Верно и обратное: если мы возьмем точку на единичной окружности, то ее координаты – это будут синус и косинус соответствующего угла. Точнее, многих углов – с точностью до периода. Значит, если пара чисел – это координаты точки на единичной окружности, то эти числа будут косинусом и синусом некоторого угла https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347599/9addbd7fdd10e0b8ba091c96f6e06fe0.png.

А какое условие, что точка лежит на единичной окружности? Сумма квадратов ее координат должна равняться https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347442/56b4d0c2dcc920afbb3ff9ba8348474b.png (уравнение окружности: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347604/718fcf56e478e329f2c931d90cc94d0d.png). Вот и получили условие. Проверим его для выражений https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347605/0b09eb6263f983393aa5d39bca7b31c7.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347606/917ced2f8fa54f772c933c9ec9583b29.png:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347607/eb0d1faa05418fb3c11d01e2a2a26fd4.png

Возводим в квадрат:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347608/82ed3ba7b176efd5865d3d9b5d2d6617.png

Равенство верное. Значит, всегда найдется такой угол https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347599/9addbd7fdd10e0b8ba091c96f6e06fe0.png, что:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347609/c22203e2d1bcb93f44e88e32ca33ee1e.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347610/8e414a4ec83d135972073f19fe1986b1.png

Естественно, это не случайность – мы специально так выбрали выражения, чтобы сумма их квадратов была равна 1.

[Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskih-vyrazhenijb/praktika-trigonometricheskie-vyrazheniya-profilnyy-uroven#mediaplayer)

В конце нашего занятия мы поговорим о формулах преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и наоборот. Как и все предыдущие, они также применяются для упрощения выражений. Конечно, у вас может возникнуть вопрос: «Во что преобразовывать, чтобы упростить выражение: в сумму или в произведение?». Если у вас такой вопрос возник, вспомните, как поступать в таких же ситуациях с рациональными выражениями: когда раскладывать на множители, а когда – раскрывать скобки.

**Задание 11.**Упростить выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347611/3ccc711dc955b8338eef441a4652f30c.png

*Решение.*

Упростить дробь – значит ее сократить. Для сокращения дроби нужно разложить числитель и знаменатель на множители. То есть нужно преобразовать сумму в произведение. Тут у нас по 3 слагаемых, какие же складывать? Возможны различные варианты, но начинать всегда лучше с симметричных. То есть со сложения https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347612/13eb74b9d03dd54696e661d7ff843847.png и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347613/00c8b356bd351ec0d2d76d88cf2e36c6.png и аналогичных синусов:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347614/17d42a594614f6693995e72fdd066e5d.png

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347615/ed5c45013b30cb29d5bb149953913ba5.png

Подставим в исходное выражение:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347616/dd4877021a0a7511117642103003c611.png

Теперь тут есть общие множители, которые можно вынести за скобки:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347617/8e39a671186810bbe9d53c67a93239ca.png

Ответ: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347618/90fae1b3a34c5da9f401874ca318f61d.png.

**Задание 12.**Доказать тождество:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347619/c91b28a730d946a757e02f73d9b8f80a.png

*Решение.*

Для доказательства упростим левую часть равенства и покажем, что она всегда равна правой. Здесь по порядку действия стоит сначала умножение, затем – сложение. Поэтому сначала можем преобразовать только произведение в сумму:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347620/0cc66010d66296aa5b3945766118ad7b.png

Подставив в левую часть равенства, получим:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347621/45089deeb13e70720ce106336086bb87.png

Видим, что после упрощения левая часть равенства тождественно равна правой.

*Доказано.*

**Домашнее задание**

1. Доказать тождество: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347622/261514dbebcd8d655ea539776578fd21.png
2. Упростить выражение: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347623/ee9247d88d0fc4eaa5c8873cdb5435ef.png
3. Преобразовать в произведение: https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/347624/56ad12db0cc7f0b03810f979cc15faf2.png

**Список литературы**

1. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Базовый и углубленный уровни. Учебник. ФГОС», АО «Издательство «Просвещение» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. 10–11.
2. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа». 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень). В 2 ч., ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА» Ч.1.: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Ч.2.: Мордкович А.Г. и др., под ред. Мордковича А.Г. 10–11.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, АО «Издательство «Просвещение» Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. 10.

**Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет**

1. Ин­тер­нет-пор­тал [yaklass.​ru](https://www.yaklass.ru/p/algebra/10-klass/preobrazovanie-trigonometricheskikh-vyrazhenii-9146/formuly-dvoinogo-argumenta-9137/re-672b30cf-ca36-46c1-970a-d8454337d474)
2. Ин­тер­нет-пор­тал [cleverstudents.ru](http://www.cleverstudents.ru/trigonometry/sum_of_sin_and_cos.html)
3. Ин­тер­нет-пор­тал [math24.ru](http://www.math24.ru/%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%81%D1%83%D0%BC%D0%BC%D1%8B-%D0%B8-%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8-%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85-%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9-%D0%B2-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5.html)
4. https://interneturok.ru/